# ŘEŠENÍ

**Cvičení 1.**

$$\mathbb{E}X = \int_1^\infty x\frac{p}{x^{p+1}}\mathrm{d}x = p\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = p\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_{x=1}^\infty = \frac{p}{p-1} =: g(p).$$

Řešíme rovnici $g(\hat{p}_n) = \bar{X}_n$, výsledkem je

$$\hat{p}_n = \frac{\bar{X}_n}{\bar{X}_n - 1}.$$

**Cvičení 2.** Označme $X$ = počet gólů vstřelených za zápas. Předpokládáme, že $X \sim Po(\lambda)$ s nějakým neznámým parametrem $\lambda > 0$. Buďte $X_1, ..., X_n$ nezávislá pozorování, která mají stejné rozdělení jako $X$.

(a) $\mathbb{E}X = \lambda$, a tedy odhad momentovou metodou je $\hat{\lambda}_n = \bar{X}_n$. Pak $\mathbb{E}\hat{\lambda}_n = \lambda$, a tedy odhad je nestranný. Dále $\mathrm{var}\hat{\lambda}_n = \frac{\mathrm{var}X}{n} = \frac{\lambda}{n}$. Z Čebyševovy nerovnosti máme

$$\mathbb{P}(|\hat{\lambda}_n - \lambda| > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{var}\hat{\lambda}_n}{\varepsilon^2} = \frac{\lambda}{n\varepsilon^n}.$$

Výraz na pravé straně konverguje pro $n \to \infty$ k nule pro všechna $\varepsilon > 0$, a tedy $\hat{\lambda}_n$ je konzistentním odhadem parametru $\lambda$.

(b) **nestrannost:**

$$\mathbb{E}\check{\lambda}_n = \lambda, \qquad \mathbb{E}\tilde{\lambda}_n = \frac{n}{n-1}\lambda,$$

a tedy $\check{\lambda}_n$ je nestranný, zatímco $\tilde{\lambda}_n$ není nestranný.

**konzistence:**

$$\mathbb{P}(|\check{\lambda}_n - \lambda| > \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_n}{2} - \lambda\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2}{2} - \lambda\right| > \varepsilon\right)$$

výraz na pravé straně nezávisí na $n$ a jistě existuje $\varepsilon > 0$ takové, že je nenulový. Odhad $\check{\lambda}_n$ tedy není konzistentní.

Ekvivalentními úpravami pro absolutní hodnotu dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\tilde{\lambda}_n - \lambda| > \varepsilon) &= \mathbb{P}\left(\left[\tilde{\lambda}_n - \frac{n}{n-1}\lambda < -\varepsilon + \lambda - \frac{n}{n-1}\right] \bigcup \left[\tilde{\lambda}_n - \frac{n}{n-1}\lambda > \varepsilon - \lambda - \frac{n}{n-1\lambda}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\tilde{\lambda}_n - \frac{n}{n-1}\lambda < -\varepsilon - \frac{1}{n}\lambda\right] \bigcup \left[\tilde{\lambda}_n - \frac{n}{n-1}\lambda > \varepsilon - \frac{1}{n}\lambda\right]\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\left[\tilde{\lambda}_n - \frac{n}{n-1}\lambda < -\varepsilon + \frac{1}{n}\lambda\right] \bigcup \left[\tilde{\lambda}_n - \frac{n}{n-1}\lambda > \varepsilon - \frac{1}{n}\lambda\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left|\tilde{\lambda}_n - \frac{n}{n-1}\lambda\right| < \varepsilon - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{\mathrm{var}\tilde{\lambda}_n}{(\varepsilon - \lambda/n)^2} = \frac{\frac{n}{(n-1)^2}\lambda}{(\varepsilon - \lambda/n)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Odhad $\tilde{\lambda}_n$ je konzistentní.

(c) Jako odhad pro $p_6 := \mathbb{P}(X = 6)$ zvolíme například

$$\hat{p}_6 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_i = 6\}.$$

Alternativně ze znalosti $p_6 = \frac{\lambda^6}{6!}e^{-\lambda}$ můžeme zvolit odhad

$$\tilde{p}_6 = \frac{\hat{\lambda}_n^6}{6!}e^{-\hat{\lambda}_n}.$$

**Cvičení 3.** Výsledek příkladu pro případ cvičení 10:40. Označme $X$ = počet dorazivších studentů na cvičení z pravděpodobnosti a statistiky z celkového počtu 23 zapsaných studentů. Pak $X \sim Bi(23, p)$ s nějakým neznámým parametrem $p \in (0, 1)$. Na základě nezávislých pozorování $X_1, ..., X_n$ chceme odhadnout hodnotu $p$.

(a) $\mathbb{E}X = 23p$, odhad momentovou metodou je tedy

$$\hat{p}_n = \frac{\bar{X}_n}{23}.$$

(b) Pro hodnoty $X_1 = 21, ...., X_6 = 18$ ze zadání dostaneme dosazením

$$\hat{p}_6 = \frac{21 + 21 + 20 + 18 + 18 + 18}{6 \cdot 23} \doteq 0.84.$$

(c) Chceme odhadnout $\theta := \mathbb{P}(X > 20)$. Odhad na základě empirické distribuční funkce je

$$\hat{\theta}_n = 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_i \leq 20\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_i > 20\}.$$

Tento odhad je nestranný i konzistentní. Konzistenci lze ověřit opět z Čebyševovy nerovnosti. Další možnost je odhad na základě vztahu

$$\mathbb{P}(X > 20) = \mathbb{P}(X = 21) + \mathbb{P}(X = 22) + \mathbb{P}(X = 23) = \binom{23}{21} p^{21}(1-p)^2 + 23p^{22}(1-p) + p^{23}$$

a odhadu z (a), tj.

$$\tilde{\theta}_n = \binom{23}{21}\left(\frac{\bar{X}_n}{23}\right)^{21}\left(1 - \frac{\bar{X}_n}{23}\right)^{2} + 23\left(\frac{\bar{X}_n}{23}\right)^{22}\left(1 - \frac{\bar{X}_n}{23}\right) + \left(\frac{\bar{X}_n}{23}\right)^{23}$$

(d) Podobně jako v (c)